

обезразмеривание:

Листок 1

①

обезразмерим ур-е диффузии:

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - kc \quad (1)$$

c - концентрация
 t - время
 D - коэф. диффузии
 x - пространственная координата
 k - константа скорости хим. реакции

1 Введем характерные параметры процесса (или также: формальные масштабные множители)

c_0, t_0, x_0, D_0, k_0 - это константы

Тогда:

$$c' = \frac{c}{c_0} \quad t' = \frac{t}{t_0} \quad k', c', t', x', D' - \text{безразмерные}$$

$$x' = \frac{x}{x_0} \quad D' = \frac{D}{D_0}, \quad k' = \frac{k}{k_0}$$

$$\Rightarrow c = c' \cdot c_0, \quad t = t' \cdot t_0,$$

$$x = x' \cdot x_0, \quad D = D' \cdot D_0, \quad k = k' \cdot k_0$$

Подставляя в ур-е (1):

$$\frac{\partial(c' \cdot c_0)}{\partial(t' \cdot t_0)} = D' \cdot D_0 \cdot \frac{\partial^2(c' \cdot c_0)}{\partial(x' \cdot x_0)^2} - K' \cdot K_0 \cdot c' \cdot c_0$$

$$\frac{c_0}{t_0} \frac{\partial c'}{\partial t'} = D' \cdot D_0 \cdot \frac{c_0}{x_0^2} \frac{\partial^2 c'}{\partial (x')^2} - K' \cdot c' \cdot K_0 \cdot c_0 \quad (2)$$

2) дадим все ур-е на какую-либо величину, имеющую размерности исходных ур-е.

В данном случае дадим (2) на $\frac{c_0}{t_0}$:

$$\frac{\partial c'}{\partial t'} = \frac{D_0 \cdot t_0}{x_0^2} \cdot D' \cdot \frac{\partial^2 c'}{\partial (x')^2} - K' \cdot c' \cdot K_0 \cdot t_0 \quad (3)$$

Видно, вообразим ур-е (1)!

Некоторые характерные пар-ры
процесса мы знаем, а некоторые - нет.

Предположим мы знаем:

$$c_0, t_0, x_0.$$

Тогда D_0, k_0 - мы не знаем.

Найдем неизвестные хар-ные пар-ры;

В упр: $\frac{\partial c'}{\partial c'} = \left[\frac{D_0 \cdot t_0}{x_0^2} \right] \cdot D' \cdot \frac{\partial^2 c'}{\partial x'^2} - k' \cdot c' \cdot [k_0 \cdot t_0] \quad (3)$

имеются безразмерные комплексы:

$$\left[\frac{D_0 \cdot t_0}{x_0^2} \right] \quad \text{и} \quad [k_0 \cdot t_0]$$

3 Из полученных безразмерных комплексов

включающих характерные параметры процесса,
выбираем столько, сколько неизвестных
множителей у нас есть, и приравняем их
к единице:

2 неизв. множителя и 2 комплекса $\Rightarrow$

$$\left[\frac{D_0 \cdot t_0}{x_0^2} \right] = 1 \quad ; \quad [k_0 \cdot t_0] = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{находим:}$$

$$D_0 = \frac{x_0^2}{t_0} \left[\frac{\text{м}^2}{\text{сек}} \right] \quad k_0 = \frac{1}{t_0} \left[\frac{1}{\text{сек}} \right]$$

[4] Решая одобрившее уравнение:

(4)

$$\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \tau'} = [1] \cdot D' \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{C}'}{\partial (X')^2} - \kappa' \cdot \mathcal{C}' \cdot [1] \quad (4)$$

Пример 1

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tau} = D \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial X^2}$$

Значит c_0, t_0, X_0
не значат D_0

[1] c_0, t_0, X_0, D_0 , тогда

$$c' = \frac{c}{c_0}, \quad t' = \frac{t}{t_0}, \quad X' = \frac{X}{X_0}, \quad D' = \frac{D}{D_0},$$

$$c = c' \cdot c_0, \quad t = t' \cdot t_0, \quad X = X' \cdot X_0, \quad D = D' \cdot D_0,$$

$$\frac{\partial (c' \cdot c_0)}{\partial (t' \cdot t_0)} = D' \cdot D_0 \cdot \frac{\partial^2 (c' \cdot c_0)}{\partial (X' \cdot X_0)^2}$$

$$[2] \quad \frac{c_0}{t_0} \cdot \frac{\partial c'}{\partial t'} = \frac{D_0 \cdot c_0}{X_0^2} \cdot D' \cdot \frac{\partial^2 c'}{\partial X'^2} \quad / : \frac{c_0}{t_0}$$

$$\frac{\partial c'}{\partial t'} = \left[\frac{D_0 \cdot t_0}{X_0^2} \right] \cdot D' \cdot \frac{\partial^2 c'}{\partial X'^2}$$

$$[3] \text{ Находим } D_0 : \left[\frac{D_0 \cdot t_0}{X_0^2} \right] = 1 \quad \Rightarrow$$

$$D_0 = \frac{X_0^2}{t_0} \quad \left[\frac{\text{м}^2}{\text{сек}} \right]$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - K C^2$$

Пример 2

знаем c_0, t_0, x_0

не знаем D_0, K_0

$$C = C' \cdot c_0, \quad t = t' \cdot t_0,$$

$$D = D' \cdot D_0, \quad x = x' \cdot x_0,$$

$$K = K' \cdot K_0$$

$$\frac{C}{t_0} \frac{\partial C'}{\partial t'} = \frac{D_0 \cdot c_0}{x_0^2} \cdot D' \frac{\partial^2 C'}{\partial x'^2} - K' \cdot C' \cdot K_0 \cdot c_0$$

[2] умножить $\frac{c_0}{t_0}$:

$$\frac{\partial C'}{\partial t'} = \left[\frac{D_0 \cdot c_0}{x_0^2} \right] D' \frac{\partial^2 C'}{\partial x'^2} - K' \cdot C' \cdot [K_0 \cdot c_0]$$

[3] найдем D_0, K_0 .

$$\left[\frac{D_0 \cdot c_0}{x_0^2} \right] = 1 \Rightarrow D_0 = \frac{x_0^2}{t_0} \left[\frac{m^2}{сек} \right]$$

$$[K_0 \cdot c_0] = 1 \Rightarrow K_0 = \frac{1}{t_0} \left[\frac{1}{сек} \right]$$

Пример 3

(6)

$$\frac{dc}{dt} = \frac{1}{\tau} \cdot (c_0 - c) - kc$$

- урав. реактора
идеального смешения

1

$$c = c' \cdot c_0, \quad t = t' \cdot t_0, \quad \tau = \tau' \cdot \tau_0, \quad k = k' \cdot k_0$$

знаем $c_0, t_0,$

тоже знаем τ_0, k_0

$$\frac{c_0}{t_0} \cdot \frac{dc'}{dt'} = \frac{1}{\tau' \tau_0} \cdot (c_0' \cdot c_0 - c' \cdot c_0) - k' \cdot c' \cdot k_0 \cdot t_0$$

2) делим $\frac{c_0}{t_0}$:

$$\frac{dc'}{dt'} = \left[\frac{t_0}{\tau_0} \right] \cdot \frac{1}{\tau'} \cdot (c_0' - c') - k' \cdot c' \cdot [k_0 t_0]$$

3) найдем τ_0, k_0 :

$$\left[\frac{t_0}{\tau_0} \right] = 1 \Rightarrow \tau_0 = t_0 \quad [\text{сек}]$$

$$[k_0 \cdot t_0] = 1 \Rightarrow k_0 = \frac{1}{t_0} \quad \left[\frac{1}{\text{сек}} \right]$$

Пример 4

$$v \frac{dc}{dx} = -kc$$

- ур-е реактора
идеального вытеснения

$$[1] \quad v = v' \cdot v_0,$$

$$c = c' \cdot c_0,$$

$$x = x' \cdot x_0,$$

$$k = k' \cdot k_0.$$

знаем: $c_0, x_0,$

не знаем: k_0, v_0 ?

$$v' \cdot v_0 \cdot \frac{c_0}{x_0} \frac{dc'}{dx'} = -k' \cdot c' \cdot k_0 \cdot c_0$$

[2] делим на c_0 :

$$\left[\frac{v_0}{x_0} \right] v' \frac{dc'}{dx'} = -k' \cdot c' \cdot [k_0]$$

[3] найдем k_0, v_0 :

$$\frac{v_0}{x_0} = 1 \Rightarrow v_0 = x_0 \quad [м]$$

$k_0 = 1 \Rightarrow$ не имеет физ. смысла, т.к. не имеет размерности

Надо применить прец. : умножим ур-е на t_0 :

$$\left[\frac{v_0 t_0}{x_0} \right] v' \frac{dc'}{dx'} = -k' \cdot c' \cdot [k_0 t_0], \text{ тогда:}$$

$$\frac{v_0 t_0}{x_0} = 1 \Rightarrow v_0 = \frac{x_0}{t_0} \quad \left[\frac{м}{сек} \right]$$

$$k_0 t_0 = 1 \Rightarrow k_0 = \frac{1}{t_0} \quad \left[\frac{1}{сек} \right]$$

Пример 5

Скорость процесса кристаллизации

8

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= - \int_0^R \rho_2^0 \cdot f \cdot \eta \cdot dr \\ \frac{\partial f}{\partial t} + \eta \cdot \frac{\partial f}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \right.$$

f - число кристаллов с
размерами от $[r, r+dr]$

η - скорости роста кристалла

$$\eta = \frac{dr}{dt}$$

[1] $c = c' \cdot c_0$

$$\rho_2^0 = \rho_2^{0'} \cdot c_0$$

$$f = f' \cdot f_0$$

$$\eta = \eta' \cdot \eta_0$$

$$t = t' \cdot t_0$$

$$dr = dr' \cdot r_0$$

r - размер кристалла в см^3

ρ_2^0 - плотность кристалла

известны: c_0, t_0, ρ_2^0

не известны: f_0, η_0

описан в методичке
стр 21-23

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{c_0}{t_0} \frac{dc'}{dt'} &= - c_0 \cdot f_0 \cdot \eta_0 \cdot r_0 \int_0^R \rho_2^{0'} \cdot f' \cdot \eta' \cdot dr' \quad (1) \\ \frac{f_0}{t_0} \frac{df'}{dt'} + \frac{\eta_0 \cdot f_0}{r_0} \cdot \eta' \cdot \frac{\partial f'}{\partial r'} &= 0 \quad (2) \end{aligned} \right.$$

[2] умножим (1) на $\frac{c_0}{t_0}$

умножим (2) на $\frac{f_0}{c_0}$:

$$\frac{dc'}{dt'} = - \left[f_0 \cdot \eta_0 \cdot r_0 \cdot t_0 \right] \int_0^R \rho_2^{0'} \cdot f' \cdot \eta' \cdot dr' \quad (3)$$

$$\frac{df'}{dt'} + \left[\frac{\eta_0 \cdot t_0}{r_0} \right] \eta' \cdot \frac{\partial f'}{\partial r'} = 0 \quad (4)$$

3) kangen t_0, η_0 :

$$\boxed{f_0 \cdot \eta_0 \cdot r_0 \cdot t_0} = 1 \Rightarrow$$

$$f_0 = \frac{1}{\eta_0 \cdot r_0 \cdot t_0}$$

$$\frac{\eta_0 \cdot t_0}{r_0} = 1 \Rightarrow \boxed{\eta_0 = \frac{r_0}{t_0}}$$

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{r_0^2}}$$

Определить тип уравнения.

(10)

Пример 1:

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial u}{\partial y}$$

Привести к общему виду:

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

$$a_{11} = 2$$

$$a_{12} = 0$$

$$a_{22} = 3$$

$$D = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22}$$

$$D = 0 - 2 \cdot 3 < 0 \quad \text{— ур-е эллиптического типа}$$

Пример 2

$$5 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 10 \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$a_{11} = 5$$

$$D = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = 0 - 5 \cdot (-6) \geq 0 \Rightarrow$$

$$a_{12} = 0$$

$$a_{22} = -6$$

ур-е гиперболического типа

Пример 3

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 8 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$a_{11} = 8$$

$$a_{22} = 0$$

$$D = 0 - 0 \cdot 8 = 0 \Rightarrow \text{ур-е параболического типа}$$

$$a_{12} = 0$$

Пример 4

11

$$10 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 20 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 15 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$u = u(x, y, z)$$

- 1) присутствуют все старшие производные 2-го.
- 2) знаки перед производными одинаковы



тип ур-я эллиптического типа

Пример 5

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} = D_L \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - kc$$

ур-е изменения
концентрации
в трубчатом реакторе

Записать:

- 1) начальные условия
- 2) граничные условия 1-го рода

Глава 1: Типы уравнений и примеры моделей стр. 13-21

Глава 2, п.2.1 Метод приведения в безразмерному виду стр. 22-24

Д/з: учебник 10-20, 21-23

решить по задачку:

1.1

1.7

15.1

15.3

html-ссылка на диске

рассмотреть статью на хабре

решить пример 5 из семинара 1

Пример из статьи:

$$m \frac{d^2 h}{dt^2} = -mg + g W p_0 \cdot e^{-bh} - \frac{c p_0 S \cdot e^{-bh}}{2} \cdot \left(\frac{dh}{dt} \right)^2$$

$$h(0) = h'(0) = 0$$

1) введем характерные кр-ые процесса:

$$h_0, t_0$$

2. выразим безразмерные переменные:

$$y' = \frac{h}{h_0}, \tau' = \frac{t}{t_0} \Rightarrow h = y' \cdot h_0, t = \tau' \cdot t_0$$

3. перепишем:

$$m \frac{d^2(h_0 \cdot y')}{d(\tau' t_0)^2} = -mg + g W p_0 \cdot e^{-b \cdot h_0 \cdot y'} - \frac{c p_0 S \cdot e^{-b \cdot h_0 \cdot y'}}{2} \cdot \left(\frac{d(h_0 \cdot y')}{d(\tau' t_0)} \right)^2$$

$$\frac{m}{t_0^2} h_0^2 \frac{\partial^2 y'}{\partial \tau'^2} = -mg + g W p_0 \cdot e^{-b h_0 y'} \cdot \left[1 - \frac{c S}{2} \cdot \frac{1}{g W} \cdot \frac{h_0^2}{t_0^2} \cdot \left(\frac{\partial y'}{\partial \tau'} \right)^2 \right] / : mg$$

2) делаем все уравнение к какому-либо величину, имеющую размерность его слагаемых делаем на mg :

$$\underbrace{\left[\frac{h_0^2}{t_0^2 g} \right]}_{\text{1 пункт}} \frac{\partial^2 y'}{\partial \tau'^2} = -1 + \underbrace{\left[\frac{W p_0}{g} \right]}_{\text{2 пункт}} \cdot \underbrace{e^{-b h_0 y'}}_{\text{3 пункт}} \cdot \left[1 - \underbrace{\left[\frac{c S}{2} \cdot \frac{1}{g W} \cdot \frac{h_0^2}{t_0^2} \right]}_{\text{4 пункт}} \cdot \left(\frac{dy'}{d\tau'} \right)^2 \right]$$

4к - 2к = 2к остается

3) приравниваем коэффициенты к единице:

$$b h_0 = 1 \Rightarrow h_0 = \frac{1}{b}, \quad t_0 = \frac{1}{b} \cdot \sqrt{\frac{c S}{2 W g}}$$

4) оставшиеся коэффициенты

используем, как критерии подобия

④ $\frac{h^0}{c_0^2 g} = \frac{1}{f^1}$ - просто присваиваем

$\frac{W \cdot p}{g} = B$ - просто присваиваем [2]

Перенесем ур-е в соотв. масштабах:

$$\underbrace{\left[\frac{1}{f^1} \right]}_{(1)} \cdot \frac{\partial^2 y'}{\partial \tau'^2} = -1 + \underbrace{[B]}_{(2)} \cdot e^{\underbrace{[-1] y'}_{(3)}} \cdot \left[1 - \underbrace{[1]}_{(4)} \left(\frac{\partial y'}{\partial \tau'} \right)^2 \right]$$

сокращаем по ур-е :)