

аппроксимация

схема 2

11

- левая: $\lambda_x^- u = \frac{u_j - u_{j-1}}{h} \quad (1)$

- правая: $\lambda_x^+ u = \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \quad (2)$

- Центральная: $\lambda_x^0 u = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} \quad (3)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}$$

Аппроксимацию произв. 1 порядка можно задать в виде комбинации (1) и (2):

$$\lambda_x^\sigma u = \sigma \frac{u_{j+1} - u_j}{h} + (1-\sigma) \frac{u_j - u_{j-1}}{h}, \text{ где } 0 \leq \sigma \leq 1$$

Пример 1:

$\sigma = 1/3$, определить порядок аппроксимации с помощью разложения в ряд Тейлора

$$\frac{1}{3} \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{u_j - u_{j-1}}{h} \right)$$

$$u_{j+1} = u_j^n + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j h^2 + \dots \quad (4)$$

$$u_{j-1} = u_j^n - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j h^2 + \dots \quad (5)$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j h^2 \right) + \frac{2}{3} \left(-\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j h^2 \right) =$$

$$\frac{1}{3} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^n \circledast h + \frac{2}{3} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n - \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^n \circledast h \Rightarrow$$

(2)

коррекцию аппроксимации первый. $O(h)$

Пример 2

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h}$$

Берем (4) и (5) и подставляем.

$$\frac{u_j^n + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n h + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^n h^2 - \left[u_j^n - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n h + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^n h^2 \right]}{2h} =$$

$$= \frac{u_j^n - u_j^n + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n h + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n h + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^n h^2 - \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^n h^2 - \dots}{2h} =$$

$$= \frac{\cancel{2} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n h + \cancel{2} \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_j^n h^3}{2h} =$$

$$= \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n + \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_j^n \circledast h^2 + \dots = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n + O(h^2)$$

Пример 3

а) записать явную
разностную схему

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} = tx$$

$\frac{\partial u}{\partial x}$ - левая конечная разность

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + 2 \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = (n\Delta t)(j-1)h$$

Пример 4

б) записать явную
разностную схему:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 4 \frac{\partial u}{\partial x} = e^t \cdot e^x$$

$\frac{\partial u}{\partial x}$ - правая
конечная разность

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 4 \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} = e^{n\Delta t} \cdot e^{(j-1)h}$$

Пример 5

а) записать явную схему:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 8 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \cdot e^t$$

аппроксимировать:

б) начальное условие:

$$u(t=0, x) = x$$

и граничные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x=0) = 0 \quad - \text{левая}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x=1) = e^t \quad - \text{правая}$$

$$x \in [0, 1]$$

$$t \in [0, 1]$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 8 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + (j-1)h \cdot e^{n\Delta t}$$

Пример 6

б) записать явную схему:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 t^3$$

$$u(t=0, x) = 0 \quad - \text{начальное}$$

$$u(t, x=0) = 0 \quad - \text{левая гран.}$$

$$u(t, x=1) = t^3 \quad - \text{правая гран.}$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 6 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + ((j-1)h)^2 \cdot (n\Delta t)^3$$

$$u_j^0 = 0$$

$$u_1^{n+1} = 0$$

$$u_N^{n+1} = [(n+1)\Delta t]^3$$

(пример 5)

$$u_j^0 = (j-1)h - \text{правые}$$

$$\frac{u_2^{n+1} - u_1^{n+1}}{h} = 0 \Rightarrow$$

$$u_2^{n+1} = u_1^{n+1} - \text{левые}$$

$$\frac{u_N^{n+1} - u_{N-1}^{n+1}}{h} = e^{(n+1)\Delta t} \Rightarrow$$

$$\bullet u_N^{n+1} = h \cdot e^{(n+1)\Delta t} + u_{N-1}^{n+1} - \text{правые}$$

Пример 7

1) Определить порядок аппроксимации:

$$\rightarrow \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 0,1 \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = (j-1)h$$

2) Записать исходную диф. ур-е

$$\bullet \frac{\partial u}{\partial t} = 0,1 \frac{\partial u}{\partial x} = x, \quad \text{порядок аппроксимации } O(h) \\ O(\Delta t)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_j^n \Delta t^2 + \dots$$

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_j^n \Delta t^2}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_j^n \Delta t \Rightarrow O(\Delta t)$$

первый порядок

по пространству x аналогично

Пример 8

5

- 1) записать явную разностную схему
- 2) определить порядок аппроксимации
- 3) аппроксимировать начальные и граничные условия

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^x \cdot e^x$$

$$u(t=0, x) = e^x \quad t \in [0, 1]$$

$$x \in [0, 1]$$

$$u(t, x=0) = e^t$$

$$u(t, x=1) = e^t + 2,7$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 3 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + e^{n\Delta t} \cdot e^{(j-1)h}$$

$$u_j^0 = e^{(j-1)h}$$

$$u_1^{n+1} = e^{(n+1)\Delta t}$$

$$u_N^{n+1} = e^{(n+1)\Delta t} + 2,7$$

порядок аппроксимации $O(\Delta t, h^2)$

$$u_j^n + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n h^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_j^n h^3 - 2u_j^n + u_j^n - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n h^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_j^n h^3 =$$

$$= \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n h^2 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_j^n h^4 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n h^2 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_j^n h^4 \Rightarrow O(h^2)$$

Пример 9

6

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 5 \frac{\partial u}{\partial x} = t^2 + x + 3$$

$$u(t=0, x) = 0$$

$$u(t, x=0) = t^2 + 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \text{левой конечной разностью}$$

$$t \in [0, 1]$$

$$x \in [0, 1]$$

$$a) \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta t} + 5 \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = ((j-\Delta t))^2 + (j-1)h + 3$$

$$b) u_j^0 = 0$$

$$u_0^{n+1} = ((n+1)\Delta t)^2 + 1$$

$$c) O(\Delta t) - O(h)$$

a) записать явную схему

б) аппроксимировать начальное и гранич. условия

в) кратко определить порядок аппроксимации

Типы граничных условий

поперечная диффузия
в реакторе

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_r \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} - kc$$

$$c = c(t, r)$$

с химической реакцией

$$D_r = 10^{-5}$$

$$k = 10^{-4}$$

$$c(t=0, x) = 10^4 \text{ кг/м}^3 - \text{расход}$$

$$r = [0; R]$$

$$t \in [0; 1]$$

1) тип уравнения
параболический

2) граничные условия:

левое: в центре трубы скорость потока
максимальна $\Rightarrow$ производная $\frac{\partial c}{\partial r} = 0$

$$\text{Условие: } \frac{\partial c}{\partial r}(t, r=0) = 0 \quad (2 \text{ рода})$$

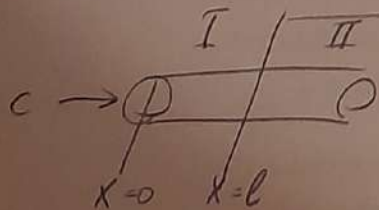
правое: у стенки скорость потока
равна нулю (нигде не течет) $\Rightarrow$

$$\text{Условие: } c(t, r=R) = 0 \quad 1 \text{ (рода)}$$

3 рода на границе раздела фаз происходит

массо- и/или теплопередача

граница раздела фаз



конц. на правой границе области I

$$c(t, x=0) = c_1(t) - \text{левое}$$

концентрация в обл. II

$$D \frac{\partial c}{\partial x}(t, x=l) = \beta [c(t, x=l) - c_{\text{средн}}(t)]$$

2 рода

коэф. массопередачи

0/3:

- а) записать явную разностную схему
- б) определить порядок аппроксимации
- в) аппроксимировать нач. и гранич. условия:

$$① \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 10^{-3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sqrt{t} - x^2$$

$$u(t=0, x) = 0$$

$$t \in [0, 1]$$

$$u(t, x=0) = 0$$

$$x \in [0, 1]$$

$$u(1, x=1) = \sqrt{t}$$

$$② \quad \frac{\partial u}{\partial t} + 10 \frac{\partial u}{\partial x} = t + x$$

$$u(t=0, x) = x$$

$$t \in [0, 1]$$

$$u(t, x=0) = t$$

$$x \in [0, 1]$$