

Пример 1

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^t + e^x$$

$$u(t=0, x) = e^x$$

$$\begin{cases} u(t, x=0) = e^{t+1} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, x=1) = e^{t+2,7} \end{cases}$$

Записать явную разностную схему

и блок-схему алгоритма

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + e^{n \Delta t} + e^{(j-1)h}$$

$$u_j^0 = e^{(j-1)h}$$

$$u_1^{n+1} = e^{(n+1)\Delta t} + 1$$

$$\frac{u_N^{n+1} - u_{N-1}^{n+1}}{h} = e^{(n+1)\Delta t} + 2,7$$

рекуррентные соотношения:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{2\Delta t}{h^2} \cdot (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + (e^{n \cdot \Delta t} + e^{(j-1)h}) \cdot \Delta t$$

для расчета левой границы:

$$u_1^{n+1} = e^{(n+1)\Delta t} + 1$$

для расчета правой границы:

$$u_N^{n+1} = u_{N-1}^{n+1} + h \cdot (e^{(n+1)\Delta t} + 2,7)$$

задание начальных условий:

$$u_j^0 = e^{(j-1)h}, \text{ в цикле } (j=1, j \leq N_x, j++)$$

$n=0$

$n \leq N_t$

нет

да

в цикле по $(j=2, j \leq N_x-1, j++)$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{2\Delta t}{h^2} \cdot \lambda_{xx}^n - (e^{n\Delta t} + e^{(j-1)h}) \cdot \Delta t$$

расчет левой точки из

левого граничного условия (ЛГУ):

$$u_1^{n+1} = e^{(n+1)\Delta t} + 1$$

расчет правой точки из

правого граничного условия (ПГУ)

$$u_{N_x}^{n+1} = u_{N_x-1}^{n+1} + h \cdot (e^{(n+1)\Delta t} + 2, 7)$$

$n++$

Пример 2

3

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 7 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3u + x + t$$

$$u(t=0, x) = x$$

а) записать явную схему

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x=0) = 1 \\ u(t, x=1) = t+1 \end{cases}$$

б) и блок-схему алгоритма.

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 7 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - 3u_j^n + (j-1)h + n \cdot \Delta t$$

$u_j^0 = (j-1)h$ - начальное условие

$$\frac{u_2^{n+1} - u_1^{n+1}}{h} = 1 \Rightarrow u_1^{n+1} = u_2^{n+1} - h - \text{для левой границы}$$

$$u_N^{n+1} = (n+1)\Delta t + 1 - \text{для правой границы}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{7\Delta t}{h^2} \cdot \lambda_{xx}^n - (3u_j^n + (j-1)h + n \cdot \Delta t) \cdot \Delta t$$

Пример 3

явная схема

прогонка

4

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 10^{-2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u + t^2 + x^2$$

$$u(t < 0, x) = x^2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x=0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, x=1) = 2 \end{cases}$$

- 1) записать явную схему
- 2) привести к виду, удобному для использования метода прогонки
- 3) найти прогоночные коэффициенты α_j, β_j
- 4) найти прогоночные коэф. α_1, β_1
- 5) Записать рекуррентное прогоночное соотношение
- 6) Найти u_{nx}^{n+1} из П.Г.У.

$$1) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 10^{-2} \cdot \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - 2u_j^{n+1} + (n \Delta t)^2 + (j-1)h^2$$

$$2) \left[\frac{-10^{-2} \Delta t}{h^2} \right] u_{j+1}^{n+1} + \left[1 + \frac{2 \cdot 10^{-2} \Delta t}{h^2} + 2 \Delta t \right] u_j^{n+1} - \left[\frac{10^{-2} \Delta t}{h^2} \right] u_{j-1}^{n+1} = \underbrace{u_j^n \left[(n \Delta t)^2 + (j-1)h^2 \right] 4 \Delta t}_{\{ \}^n}$$

a_j b_j c_j

$$3) \quad a_j \cdot u_{j+1}^{n+1} + b_j \cdot u_j^{n+1} + c_j \cdot \underline{u_{j-1}^{n+1}} = \{j\}^n$$

видим связь, как в рекуррентном
прогностическом соотношении.

$$\underline{u_{j-1}^{n+1}} = \alpha_{j-1} u_j^{n+1} + \beta_{j-1} \quad \text{подставляем:}$$

$$a_j \cdot u_{j+1}^{n+1} + b_j \cdot u_j^{n+1} + c_j \cdot [\alpha_{j-1} u_j^{n+1} + \beta_{j-1}] = \{j\}^n$$

$$\text{Тогда: } u_j^{n+1} = -\frac{a_j}{b_j + c_j \cdot \alpha_{j-1}} \cdot u_{j+1}^{n+1} + \frac{\{j\}^n - c_j \cdot \beta_{j-1}}{b_j + c_j \cdot \alpha_{j-1}}$$

$$u_j^{n+1} = \alpha_j \cdot u_{j+1}^{n+1} + \beta_j \Rightarrow$$

$$\alpha_j = -\frac{a_j}{b_j + c_j \alpha_{j-1}}$$

$$\beta_j = \frac{\{j\}^n - c_j \beta_{j-1}}{b_j + c_j \alpha_{j-1}}$$

условие устойчивости метода прогонки

6

$$|a_j| + |c_j| < |b_j|$$

$$\left| \frac{-10^{-2} \Delta \epsilon}{h^2} \right| + \left| \frac{-10^{-2} \Delta \epsilon}{h^2} \right| < \left| 1 + 2\Delta \epsilon + \frac{2 \cdot 10^{-2} \Delta \epsilon}{h^2} \right| \quad \text{выполняется}$$

4) Найти α_1 и β_1 . Из п. 2.4:

$$\frac{u_2^{n+1} - u_1^{n+1}}{h} = 0$$

$$u_1^{n+1} = u_2^{n+1}$$

сравниваем с $u_j^{n+1} = \alpha_j u_{j+1}^{n+1} + \beta_j$

$$u_1^{n+1} = 1 \cdot u_2^{n+1} + 0$$

или

$$\underline{\alpha_1 = 1 \quad \beta_1 = 0}$$

$$5) u_j^{n+1} = \alpha_j u_{j+1}^{n+1} + \beta_j$$

$$6) \frac{u_N^{n+1} - u_{N-1}^{n+1}}{h} = 2 \quad | \cdot h$$

$$u_{N-1}^{n+1} = \alpha_{N-1} u_N^{n+1} + \beta_{N-1}$$

$$u_N^{n+1} - \alpha_{N-1} u_N^{n+1} - \beta_{N-1} = 2 \cdot h$$

$$u_N^{n+1} [1 - \alpha_{N-1}] = 2h + \beta_{N-1}$$

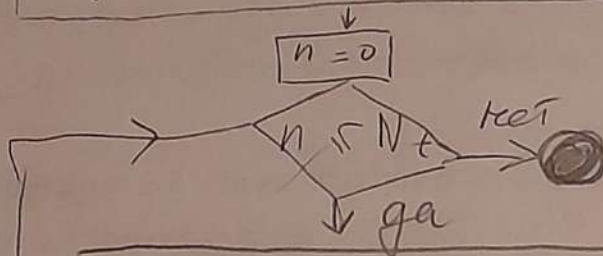
$$u_N^{n+1} = \frac{2h + \beta_{N-1}}{1 - \alpha_{N-1}}$$

Блок-схема алгоритма прогонки

7

задание начальных условий

$$u_j^0 = [(j-1)h]^2, \text{ в цикле } u(j=1, j \leq N_x, j++)$$



определения α_1, β_1 из АГУ:

$$u_1^{n+1} = u_2^{n+1} \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = 1, \beta_1 = 0$$

цикл $u(j=2, j \leq N_x-1, j++)$

расчет: $a_j, b_j, c_j,$

$$\alpha_j = -\frac{a_j}{b_j + c_j \cdot \alpha_{j-1}}$$

$$\beta_j = \frac{\xi_j^n - c_j \cdot \beta_{j-1}}{b_j + c_j \cdot \alpha_{j-1}}$$

слева
направо

расчет правой точки: из АГУ

$$u_N^{n+1} = u_{N-1}^{n+1} + 2h$$

цикл $u(j=N_x-1, j \geq 1, j--)$

$$u_j^{n+1} = \alpha_j \cdot u_{j+1}^{n+1} + \beta_j$$

↓

```

    graph TD
      LoopStart(( )) --> Init[n = 0]
      Init --> Cond{n ≤ Nx}
      Cond -- да --> LoopStart
      Cond -- нет --> End(( ))
  
```

Д 13:

8

1) записать явную разностную схему

2) блок-схему алгоритма

3) записать явную разностную схему

4) блок-схему алгоритма

5) проверить явную схему на устойчивость

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t \cdot x$$

$$u(t=0, x) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x=0) = t \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, x=1) = 2t \end{array} \right.$$