

# Пример 3

Семинар 6

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} = -e^t + x \quad h = 10^{-1}$$

$$u(t=0, x) = x$$

$$\Delta t = ?$$

$$u(t, x=0) = e^t \quad \text{ЛГУ}$$

1) Левая схема Левой разности

2) устойчивость

3) найти максимальный шаг  $\Delta t$

4) записать блок-схему алгоритма и рекуррентную формулу

$$1) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + 2 \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0$$

$$2) u_j^n = \lambda^n \cdot e^{ikj}$$

$$\frac{\lambda^{n+1} \cdot e^{ikj} - \lambda^n \cdot e^{ikj}}{\Delta t} + 2 \frac{\lambda^n \cdot e^{ikj} - \lambda^n \cdot e^{ik(j-1)}}{h} = 0 \quad / \lambda^n e^{ikj}$$

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} + 2 \frac{1 - e^{-ik}}{h} = 0$$

$$\lambda - 1 + \frac{2\Delta t}{h} - \frac{2\Delta t}{h} \cdot e^{-ik} = 0$$

$$\lambda = 1 - \frac{2\Delta t}{h} + \frac{2\Delta t}{h} \cdot e^{-ik}$$

делаем замену:

$$\left[ \frac{2\Delta t}{h} = r \right] \quad \begin{array}{l} r < 1 \\ r = 1 \\ r > 1 \end{array}$$

$$\lambda = (1-r) + r \cdot e^{-ik} \quad (1) \quad | \lambda | \leq 1$$

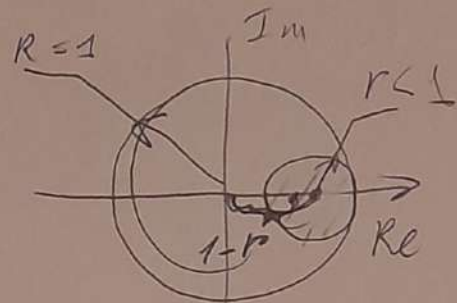
$\lambda$  расположен внутри или на границе круга радиуса 1 с центром в начале координат.

$$\lambda = (1-r) + r \cdot e^{-ix}$$

2

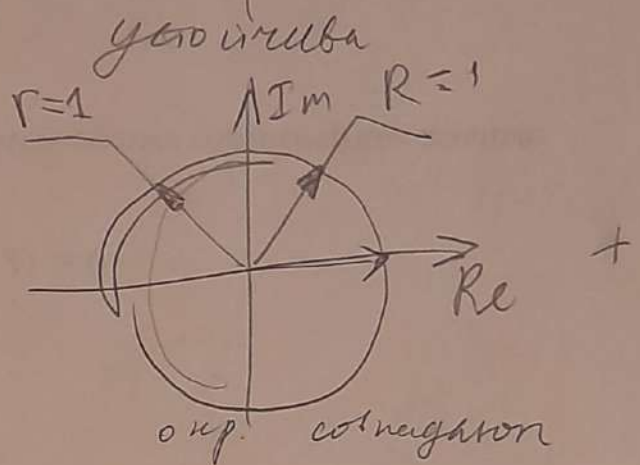
Числа  $\lambda$  лежат на комплексной плоскости  
на окружности с центром в точке  $(1-r)$   
и радиусом окружности  $|r \cdot e^{-ix}|$

1) при  $r < 1$  — маленькая окр.  
внутри большой



2) при  $r=1$  — окружности  
совпадают

$$\lambda = r \cdot e^{-ix}$$



3) при  $r > 1$  — все же все  
большая окружность лежит  
внутри комплексной  $\Rightarrow$

$$r < 1$$

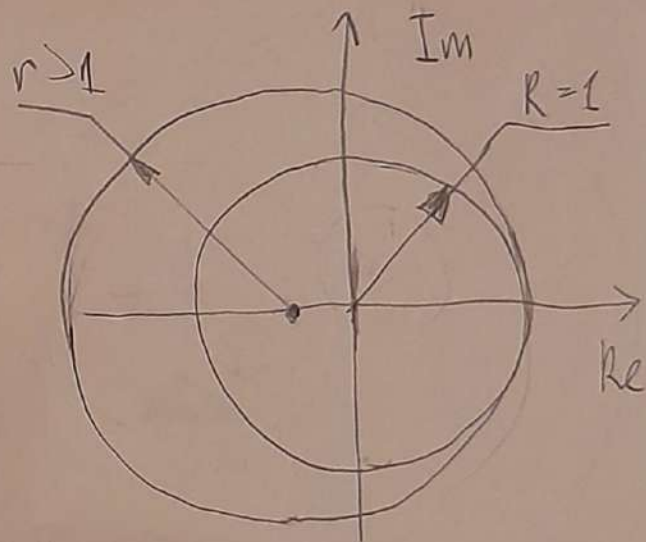
$$r = \frac{2\Delta t}{h} \leq 1$$

устойчива

$$\Delta t \leq \frac{h}{2}$$

$$\text{пусть } h = 10^{-1}$$

$$\Delta t = 0,5 \cdot 10^{-1} = 0,05$$



$$u_j^{n+1} - u_j^n + 2 \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = -e^{u_0 t} + (j-1)h$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{2\Delta t}{h} \cdot (u_j^n - u_{j-1}^n) [e^{u_0 t} + (j-1)h] \cdot \Delta t$$

$$u_j^0 = (j-1)h \quad \text{и.у.} \quad u_1^{n+1} = e^{(n+1)\Delta t} \quad \text{ЛТУ}$$

Задание начальных условий

$$U_j^0 = (j-1) \cdot h, \text{ цикл по } j=1, j \leq N_x, j++$$

$$n = 0$$

$$n \leq N_t$$

yes  
no

цикл for  $j=2, j \leq N_x, j++$

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{2\Delta t}{h} \cdot (U_j^n - U_{j-1}^n) \cdot [e^{k\Delta t} + (j-1)h] \Delta t$$

$$U_1^{n+1} = e^{(n+1)\Delta t}$$

ЛГУ

$$n = n + 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \epsilon \frac{\partial u}{\partial x} = 2tx$$

пример 2

$$h = 10^{-1}$$

1) левая схема

правой конечной разности

$$u(t=0, x) = 0$$

$$u(t, x=1) = t$$

2) проверить устойчивость

$$1) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \epsilon \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0$$

$$2) \boxed{u_j^n = \lambda^n \cdot e^{ikj}}$$

$$\frac{\lambda^{n+1} \cdot e^{ikj} - \lambda^n \cdot e^{ikj}}{\Delta t} - \epsilon \frac{\lambda^n \cdot e^{i2(j+1)} - \lambda^n \cdot e^{i2j}}{h} = 0 \quad / \lambda^n \cdot e^{ikj}$$

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} - \epsilon \frac{e^{i2} - 1}{h} = 0$$

$$\lambda - 1 = \frac{\epsilon \Delta t}{h} \cdot (e^{i2} - 1) = 0$$

$$\lambda = 1 - \frac{\epsilon \Delta t}{h} + \frac{\epsilon \Delta t}{h} \cdot e^{i2}$$

знаем замену:

$$\left[ \frac{\epsilon \Delta t}{h} = r \right]$$

исследуем

$$r < 1$$

$$r = 1$$

$$r > 1$$

$$\lambda = 1 - r + r \cdot e^{i2}$$

$$|\lambda| \leq 1$$

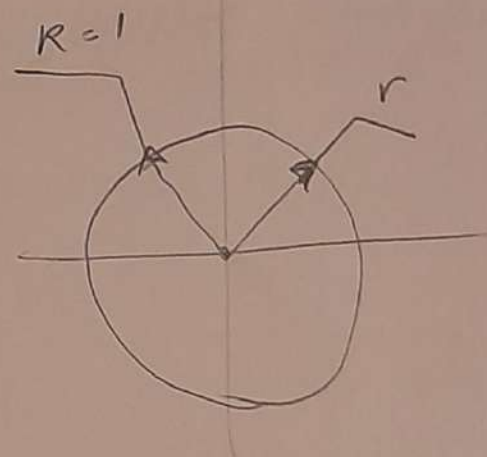
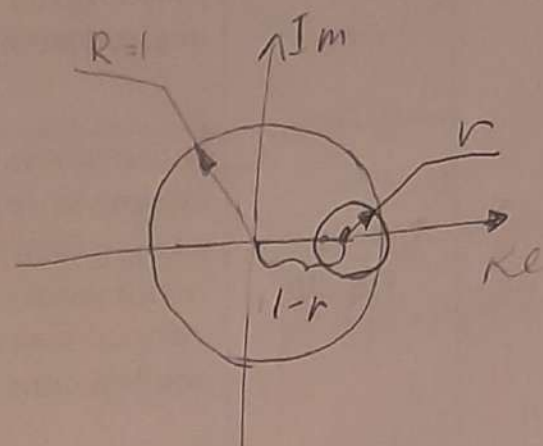
$$\lambda = 1 - r + r \cdot e^{i\alpha}$$

Числа  $\lambda$  лежат на комплексной плоскости на окружности с центром в точке  $(1-r)$  и радиусом  $|r \cdot e^{i\alpha}|$

1) при  $r < 1$  лежат внутри окруж.

2) при  $r = 1$  - лежат на окружности

3) при  $r > 1$  - лежат вне окружности

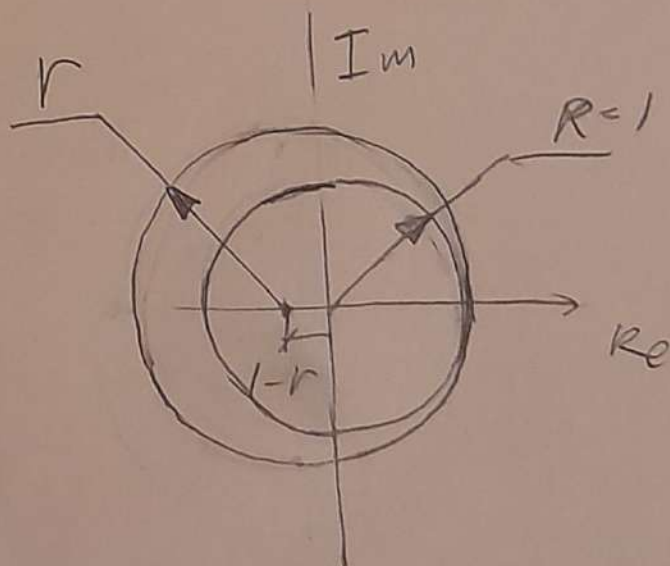


условие устойчивости

$$r \leq 1$$

$$\frac{6\Delta t}{h} \leq 1$$

$$\Delta t \leq \frac{h}{6}$$



### Пример 3

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 7 \frac{\partial u}{\partial x} = e^x + e^t$$

$$u(t=0, x) = e^x$$

$$u(t, x=0) = e^t$$

$$u(t, x=1) = e^t + 2.7$$

- 1) записать неявную схему, выбрав конкретную разность
- 2) устойчивость

$$1) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + 7 \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} = e^{(n+1)\Delta t} + e^{(j-1)h}$$

$$2) u_j^n = \lambda^n \cdot e^{i2j}$$

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} + 7 \frac{\lambda - \lambda \cdot e^{-i2}}{h} = 0$$

$$\lambda - 1 + \frac{7\Delta t}{h} \cdot \lambda (1 - e^{-i2}) = 0$$

$$\lambda \cdot \left[ 1 + \frac{7\Delta t}{h} - \frac{7\Delta t}{h} \cdot e^{-i2} \right] = 1$$

далее заметим:

$$\left[ \frac{7\Delta t}{h} = r \right]$$

Тогда:

$$\lambda = \frac{1}{1+r-r \cdot e^{-id}}$$

дадим замену:

$$b = 1+r-r \cdot e^{-id}, \text{ тогда:}$$

$$\lambda = \frac{1}{b} \quad | \lambda | \leq 1 \quad \text{или}$$

$$\left| \frac{1}{b} \right| \leq 1 \quad / \cdot |b|$$

$1 \leq |b|$  — собств. числа  
должны лежать

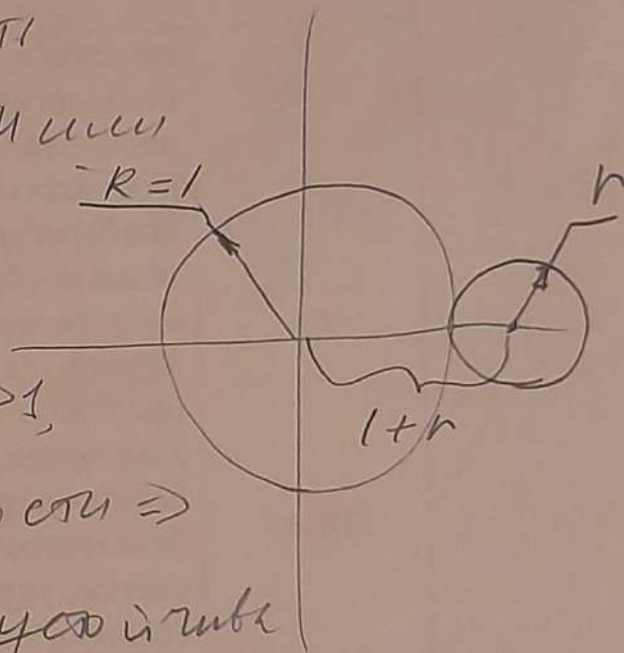
вне окружности или  
на ней.



при  $r < 1, r = 1, r > 1,$

всегда вне окружности  $\Rightarrow$

система абсолютно устойчива



Пример 4

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 5 \frac{\partial u}{\partial x} = x^2 + t^{3/2}$$

$$u(t=0, x) = x^2$$

$$u(t, x=1) = t^3 \text{ правое}$$

1) квадратичная схема правой гранично  
2) устойчивость

$$1) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 5 \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = (j+1)h^2 + ((n+1)\Delta t)^{3/2}$$

$$u_j^0 = (j-1)h^2$$

$$u_j^{n+1} = [(n+1)\Delta t]^3$$

$$2) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 5 \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0$$

$$u_j^n = \lambda^n \cdot e^{ikj}$$

$$\frac{\lambda^{n+1} e^{ikj} - \lambda^n e^{ikj}}{\Delta t} - 5 \frac{\lambda^{n+1} e^{i k (j+1)} - \lambda^{n+1} e^{ikj}}{h} = 0$$

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} = 5 \cdot \frac{\lambda \cdot e^{ik} - 1}{h} = 0$$

$$1 \cdot \left[ 1 + \frac{5\Delta t}{h} - \frac{5\Delta t}{h} \cdot e^{ik} \right] = 1$$

$$1 = \frac{1}{1 + \frac{5\Delta t}{h} - 5 \frac{\Delta t}{h} \cdot e^{ik}}$$

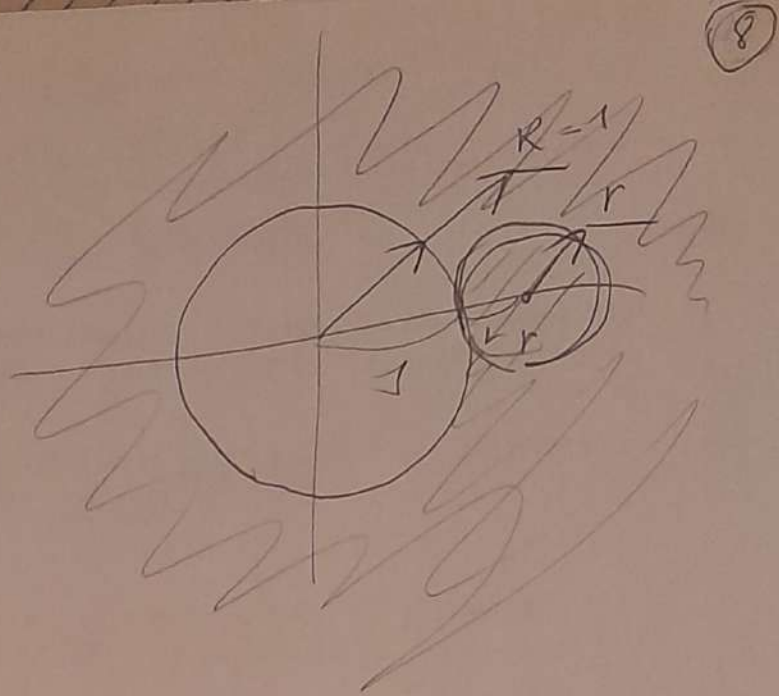
$$\frac{5\Delta t}{h} = r$$

$$1 = \frac{1}{1 + r - r \cdot e^{ik}} = \frac{1}{b}$$

$$b = 1 + r - r \cdot e^{ix}$$

$$|b| = |(1+r) - r e^{ix}|$$

линии  $b$  имеет на окружности с центром в точке  $(1+r)$  и радиусом  $|-r e^{ix}| = r$



$$|b| \geq 1 \Rightarrow 1 \leq 1$$

абсолютно унитарна

$$u_j^{n+1} = \frac{5\Delta t}{h} \cdot u_{j+1}^{n+1} + \frac{u_j^n + \Delta t [(j-1) \cdot h]^2 + ((n+1) \Delta t)^{3/2}}{1 + \frac{5\Delta t}{h}}$$

блок-схема:

задание нач. условий  
 $u_j^0 = [(j-1)h]^2$ , циклы по  $(j=1, j \leq N_x, j++)$

$n = 0$

да  $n \leq N_t$  нет

$u_N^{n+1} = [(n+1)\Delta t]^3$

нгу

циклы по  $(j = N_x - 1, j \geq 1, j--)$

$$u_j^{n+1} = \frac{5\Delta t}{h} \cdot u_{j+1}^{n+1} + \frac{u_j^n + \Delta t [(j-1)h]^2 + ((n+1)\Delta t)^{3/2}}{1 + \frac{5\Delta t}{h}}$$

справа  
калево

$n = n + 1$

Пример 5 выбор неверной конечной разности, явная схема

9

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} = -e^t + 1 \quad (\text{из примера 1})$$

Схема устойчива при аппроксимации

$2 \frac{\partial u}{\partial x}$  своей конечной разностью.

Выберем правую  $u_j$   
проверим устойчивость.

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + 2 \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0$$

$$u_j^n = \lambda^n \cdot e^{i\alpha j}$$

$$\frac{\lambda^{n+1} \cdot e^{i\alpha j} - \lambda^n \cdot e^{i\alpha j}}{\Delta t} + 2 \frac{\lambda^n \cdot e^{i\alpha(j+1)} - \lambda^n \cdot e^{i\alpha j}}{h} = 0$$

$\lambda^n \cdot e^{i\alpha j}$

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} + 2 \frac{e^{i\alpha} - 1}{h} = 0$$

$$\lambda = 1 + \frac{2\Delta t}{h} - \frac{2\Delta t}{h} \cdot e^{i\alpha}$$

делаем замену:

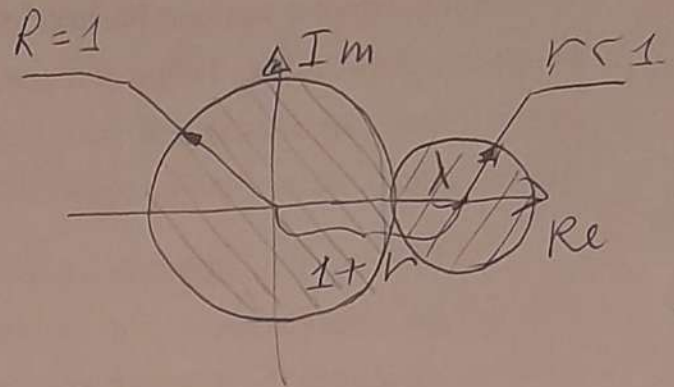
$$\left[ \frac{2\Delta t}{h} = r \right]$$

$$\lambda = \underbrace{1+r} - \underbrace{r \cdot e^{i\alpha}} \Rightarrow$$

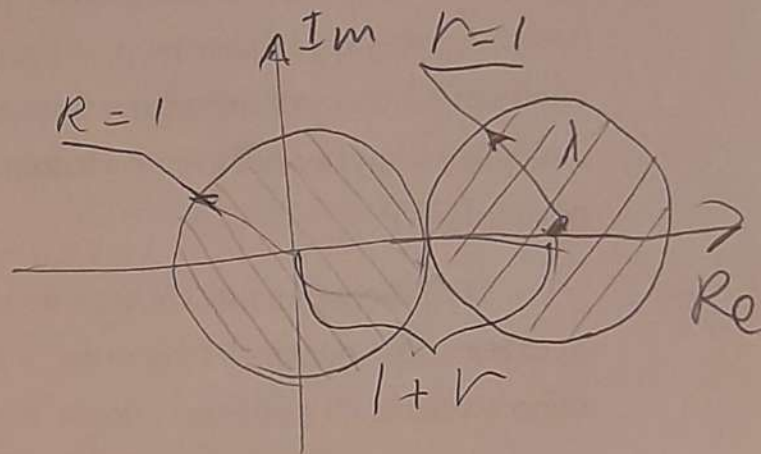
собственные числа  $\lambda$  находятся на окружности с центром  $1+r$  и с радиусом  $r$ .

$$|\lambda| \leq 1$$

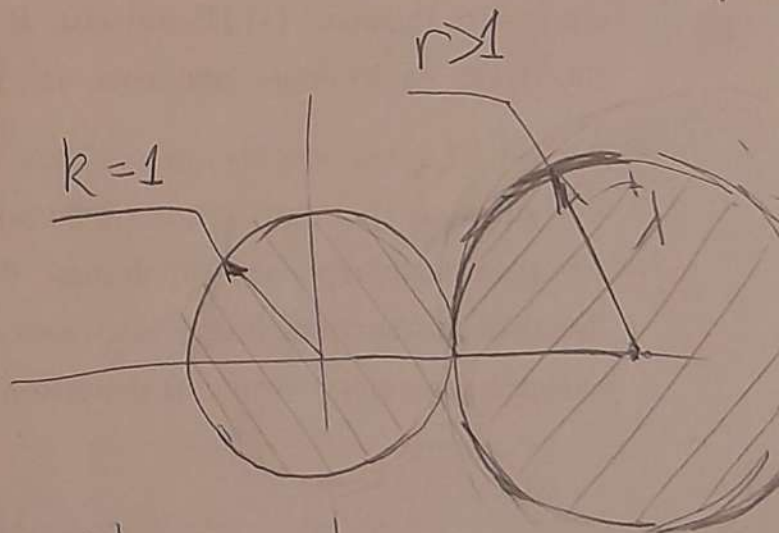
при  $r < 1$



при  $r = 1$



при  $r > 1$



Во всех трех случаях собственные числа  $\lambda$  находятся вне окружности  $\Rightarrow$  условие устойчивости не выполняется, и

$$|\lambda| > 1$$

схема неустойчива

2/3

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 10 \frac{\partial u}{\partial x} = e^x + t$$

$$u(t=0, x) = e^x$$

$$u(t, x=1) = t + 2.7$$

- ① 1) записать явную схему,  $x \in [0; 1]$   
выбрав конечную разность  $h = 10^{-3}$   
2) проверить на устойчивость  
3) найти  $\Delta t$   
4) записать блок-схему

- ② 1) записать явную схему,  
выбрав конечную разность  
2) проверить на устойчивость  
3) записать блок-схему