

Решение диф. ур-в парад. Сессия 7
 Типа, содержащих производную первого
 порядка по координате.

①

Пример 1

$$\frac{\partial U}{\partial t} + 2 \frac{\partial U}{\partial x} = 10 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \epsilon x$$

1) записать явную схему,

выбрав подходящую
 конечную разность

$$U(t=0, x) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(t, x=0) = \epsilon \\ U(t, x=1) = 2t \end{cases}$$

2) вывести рекуррентные
 формулы

3) записать блок-схему

$$1) \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + 2 \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{h} = 10 \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} + \epsilon \Delta t \cdot (j-1)h$$

$$2) U_j^{n+1} = U_j^n - 2\Delta t \cdot \lambda_x^- U_j^n + 10\Delta t \lambda_{xx} U_j^n + \epsilon \Delta t^2 (j-1)h$$

ЛТУ:

$$\frac{U_2^{n+1} - U_1^{n+1}}{h} = (n+1)\Delta t$$

ПТУ:

$$U_{Nx}^{n+1} = 2(n+1)\Delta t$$

$$U_1^{n+1} = U_2^{n+1} + (n+1)\Delta t \cdot h$$

Пример 2

3

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 5 \frac{\partial u}{\partial x} = 7 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t^2, tx$$

- 1) записать известную схему, выбрав конечную разность.
- 2) привести к виду, удобному к решению
- 3) Найти α_1, β_1 из ПГУ.
- 4) Найти U_{Nx} из ПГУ.
- 5) Записать блок-схему.

$$\begin{cases} u(t=0, x) = 0 \\ u(t, x=0) = t^2 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, x=1) = t \end{cases}$$

$$1) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 5 \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} = 7 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} +$$

$$2) u_{j-1}^{n+1} \cdot \left[-\left(\frac{5\Delta t}{h} + \frac{7\Delta t}{h^2} \right) \right] + u_j^{n+1} \cdot \left[1 + \frac{5\Delta t}{h} + 14 \frac{\Delta t}{h^2} \right] +$$

$$+ u_{j+1}^{n+1} \left[-\frac{7\Delta t}{h^2} \right] = u_j^n \cdot \Delta t \cdot \left[(n\Delta t)^2 + n\Delta t(2-1)h \right]$$

$$\checkmark |a_j| + |c_j| < |b_j|$$

$$3) u_1^{n+1} = ((n+1)\Delta t)^2 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \beta_1 = ((n+1)\Delta t)^2$$

$$4) u_{N+1}^{n+1} = \alpha_{N+1} \cdot u_{Nx}^{n+1} + \beta_{N+1}$$

$$\frac{u_{Nx}^{n+1} - u_{N+1}^{n+1}}{h} = (n+1)\Delta t$$

$$\frac{U_{N1}^{n+1} - L_{N1-1} \cdot U_{N1}^{n+1} - \beta_{N1-1}}{h} = (n+1) \Delta t$$

$$U_{N1}^{n+1} \cdot [1 - L_{N1-1}] = \beta_{N1-1} + (n+1) \Delta t \cdot h$$

$$U_{N1}^{n+1} = \frac{\beta_{N1-1} + (n+1) \Delta t \cdot h}{1 - L_{N1-1}}$$

Пример 3

(6)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 8 \frac{\partial u}{\partial x} = 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \cdot \sqrt{t}$$

$$u(t=0, x) = 0$$

а) записать уединенную схему Кранка-Николсона

и. 2) - 5) из примера 2.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x=0) = 0 \\ u(t, x=1) = \sqrt{t} \end{cases}$$

$$f) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 4 \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} - 4 \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} =$$

$$= 3 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + 3 \lambda_{x,j} u_j^n + (j-1)h \cdot (n\Delta t)^{1/2}$$

$$2) u_{j+1}^{n+1} \left[-\left(\frac{4\Delta t}{h} + 3 \frac{\Delta t}{h^2} \right) \right] + u_j^{n+1} \left[1 + \frac{4\Delta t}{h} + \frac{6\Delta t}{h^2} \right] +$$

$$+ u_{j-1}^{n+1} \left[-\frac{3\Delta t}{h^2} \right] = u_j^n + 3\Delta t \lambda_{x,j} u_j^n + 4 \Delta t u_j^n + \underbrace{\left[(j-1)h \cdot (n\Delta t)^{1/2} \right] \Delta t}_{\{j\}^n}$$

$$\sqrt{|a_j| + |c_j|} < |b_j|$$

3) α_1, β_1 из ПГУ:

$$\frac{u_2^{n+1} - u_1^{n+1}}{h} = 0$$

$$u_1^{n+1} = u_2^{n+1} \Rightarrow \alpha_1 = 1, \beta_1 = 0$$

$$4) u_{N+1}^{n+1} = ?$$

$$u_{N+1}^{n+1} = ((n+1)\Delta t)^{1/2}$$

Д/З:

Пример 1

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 9 \frac{\partial u}{\partial x} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \cdot e^t$$

1) записать устойчивую
явную схему

2) вывести рекуррентные формулы, Г.У. и М.У.

3) записать блок-схему

$$u(t=0, x) = \sqrt{x}$$

$$u(t, x=0) = t^{1/3}$$

$$u(t, x=1) = t^{1/3} + 1$$

Пример 2

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 12 \frac{\partial u}{\partial x} = 0,1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sqrt{t} + u$$

$$u(t=0, x) = 0$$

$$u(t, x=0) = \sqrt{t}$$

1) записать устойчивую
явную схему

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x=1) = 1$$

л. 2) - 3) из примера 2 на компьютере

Пример 3

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 0,2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0,4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \cdot t$$

$$u(t=0, x) = 2,7 + e^x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x=0) = 1$$

л. 1) - 3) из примера 3

на компьютере.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x=1) = 2,7 + e^t$$

(схема К.-И.)