

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nabla \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(t, x, y)$$

- ① разность по x на $n+1/2$, разность по y на n
 ② разность по y на $n+1$, разность по x на $n+1/2$

$$① \frac{u_{jk}^{n+1/2} - u_{jk}^n}{\Delta t} = \frac{\nabla}{2} \lambda_{xx}^{n+1/2} + \frac{\nabla}{2} \lambda_{yy}^n$$

$$② \frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^{n+1/2}}{\Delta t} = \frac{\nabla}{2} \lambda_{xx}^{n+1/2} + \frac{\nabla}{2} \lambda_{yy}^{n+1} + f_{jk}^{n+1/2}$$

В сумме:

$$\frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\Delta t} = \nabla \lambda_{xx}^{n+1/2} + \frac{\nabla}{2} \lambda_{yy}^{n+1} + \frac{\nabla}{2} \lambda_{yy}^n + f_{jk}^{n+1/2}$$

Правая часть уравнения аппроксимирована относительно точки $t^{n+1/2}$. Это значит, что конечная разность по времени является центральной к.р. и имеет 2-й порядок аппроксимации

$$O(\Delta t^2, h_x^2, h_y^2)$$

Пример 1 схема перемкнутого направления

(2)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 10 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \epsilon + \chi y$$

- 1) записать схему
- 2) проверить устойчивость прогонки
- 3) записать блок схемы

$$① \frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^n}{\Delta t} = 5 \frac{u_{j+1,k}^{n+1/2} - 2u_{j,k}^{n+1/2} + u_{j-1,k}^{n+1/2}}{h_x^2} + 4 \frac{u_{j,k+1}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j,k-1}^n}{h_y^2}$$

$$② \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} = 5 \frac{u_{j+1,k}^{n+1/2} - 2u_{j,k}^{n+1/2} + u_{j-1,k}^{n+1/2}}{h_x^2} + 4 \frac{u_{j,k+1}^{n+1} - 2u_{j,k}^{n+1} + u_{j,k-1}^{n+1}}{h_y^2} +$$

$$(n+1/2)\Delta t + (j-1)h_x \cdot (k-1)h_y$$

Приведем нашу схему к виду, удобному для прогонки:

$$① \underbrace{u_{j+1,k}^{n+1/2} \left[\frac{-5\Delta t}{h_x^2} \right]}_{a_j} + \underbrace{u_{j,k}^{n+1/2} \left[1 + \frac{10\Delta t}{h_x^2} \right]}_{b_j} + \underbrace{u_{j-1,k}^{n+1/2} \left[\frac{-5\Delta t}{h_x^2} \right]}_{c_j} = u_{j,k}^n + 4\Delta t \lambda_{yy}^n$$

$$\left| \frac{-5\Delta t}{h_x^2} \right| + \left| \frac{-5\Delta t}{h_x^2} \right| < \left| 1 + \frac{10\Delta t}{h_x^2} \right| \quad \begin{array}{l} \text{прогонка} \\ \text{сходится} \end{array}$$

$$② \underbrace{u_{j,k+1}^{n+1} \left[\frac{-4\Delta t}{h_y^2} \right]}_{a_j} + \underbrace{u_{j,k}^{n+1} \left[1 + \frac{8\Delta t}{h_y^2} \right]}_{b_j} + \underbrace{u_{j,k-1}^{n+1} \left[\frac{-4\Delta t}{h_y^2} \right]}_{c_j} = u_{j,k}^{n+1/2} + \lambda_{xx} \cdot \Delta t +$$

$$+ \Delta t \left[(n+1/2)\Delta t + (j-1)h_x \cdot (k-1)h_y \right]$$

$$\left| \frac{-4\Delta t}{h_y^2} \right| + \left| \frac{-4\Delta t}{h_y^2} \right| < \left| 1 + \frac{8\Delta t}{h_y^2} \right| \quad \begin{array}{l} \text{прогонка} \\ \text{сходится} \end{array}$$

Пример 2

Схема переносных неструктурированных

③

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2u + t$$

$$① \frac{u_{jk}^{n+1/2} - u_{jk}^n}{\Delta t} = 2\lambda_{xx}^{n+1/2} + 3\lambda_{yy}^n$$

$$② \frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^{n+1/2}}{\Delta t} = 2\lambda_{xx}^{n+1/2} + 3\lambda_{yy}^{n+1} - 2u_{jk}^{n+1/2} + (n+1/2)\Delta t$$

Проверим стабильности прогонки:

$$① u_{j+1,k}^{n+1/2} \cdot \underbrace{\left[\frac{-2\Delta t}{h_x^2} \right]}_{a_j} + u_{jk}^{n+1/2} \cdot \underbrace{\left[1 + \frac{4\Delta t}{h_x^2} \right]}_{b_j} + u_{j-1,k}^{n+1/2} \cdot \underbrace{\left[\frac{-2\Delta t}{h_x^2} \right]}_{c_j} = u_{jk}^n + 3\Delta t \lambda_{yy}^n$$

прогонка получается: $|a_j| + |c_j| \leq |b_j|$

$$② u_{j,k+1}^{n+1} \cdot \underbrace{\left[\frac{-3\Delta t}{h_y^2} \right]}_{a_j} + u_{jk}^{n+1} \cdot \underbrace{\left[1 + \frac{6\Delta t}{h_y^2} \right]}_{b_j} + u_{j,k-1}^{n+1} \cdot \underbrace{\left[\frac{-3\Delta t}{h_y^2} \right]}_{c_j} = u_{jk}^{n+1/2} + 2\Delta t \lambda_{xx}^{n+1/2} - 2\Delta t \cdot 2u_{jk}^{n+1/2} + (n+1/2)\Delta t^2$$

прогонка получается

Схема предиктор-корректор (4)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nabla \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y)$$

$$\textcircled{1} \frac{u_{jk}^{n+1/4} - u_{jk}^n}{\Delta t/2} = \nabla \lambda_{xx}^{n+1/4}$$

$$\textcircled{2} \frac{u_{jk}^{n+1/2} - u_{jk}^{n+1/4}}{\Delta t/2} = \nabla \lambda_{yy}^{n+1/2}$$

③ корректор:

$$\frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^{n+1/2}}{\Delta t} = \underbrace{\nabla \lambda_{xx}^{n+1/2} + \nabla \lambda_{yy}^{n+1/2} + f_{jk}^{n+1/2}}$$

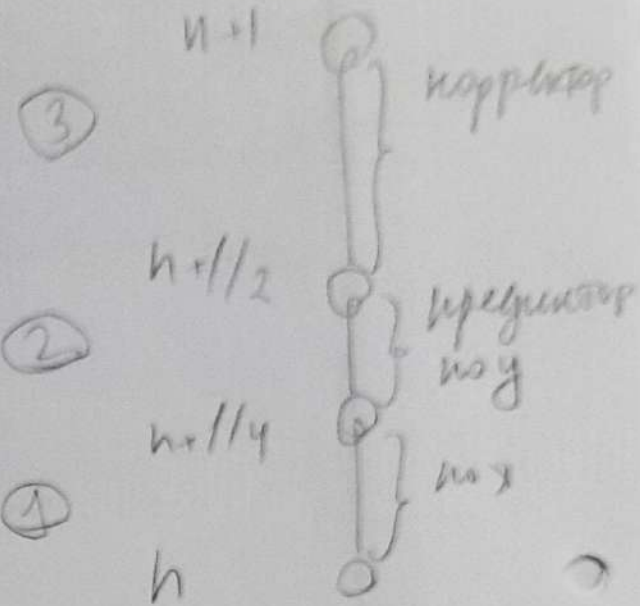
Правая часть корректора аппроксимирована относительно точки $\in n+1/2$. Значит к.р. во вращении в корректоре является центральной, и имеет 2 порядка точности.

Корректор повышает точность схемы по

времени: $O(\Delta t^2, h_x^2, h_y^2)$

Для решения корректора:

$$u_{ik}^{n+1} = u_{ik}^n + \Delta t \nabla \lambda_{xx}^{n+1/2} + \Delta t \nabla \lambda_{yy}^{n+1/2} + \Delta t f_{ik}^{n+1/2}$$



Пример 3

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + e^t$$

- 1) записать схему предиктор-корректор
- 2) вывести рекуррентное соотношение для корректора
- 3) записать блок-схему
- 4) определить порядок точности

1)

$$\textcircled{1} \frac{u_{jk}^{n+1/4} - u_{jk}^n}{\Delta t/2} = 3 \frac{u_{j+1,k}^{n+1/4} - 2u_{jk}^{n+1/4} + u_{j-1,k}^{n+1/4}}{h_x^2}$$

$$\textcircled{2} \frac{u_{jk}^{n+1/2} - u_{jk}^{n+1/4}}{\Delta t/2} = 4 \frac{u_{j,k+1}^{n+1/2} - 2u_{jk}^{n+1/2} + u_{j,k-1}^{n+1/2}}{h_y^2}$$

$$\textcircled{3} \frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^{n+1/2}}{\Delta t} = 3\lambda_{xx}^{n+1/2} + 4\lambda_{yy}^{n+1/2} + e^{(n+1/2)\Delta t}$$

$$2) u_{jk}^{n+1} = u_{jk}^{n+1/2} + 3\Delta t \lambda_{xx}^{n+1/2} + 4\Delta t \lambda_{yy}^{n+1/2} + e^{(n+1/2)\Delta t}$$

$$4) O(\Delta t^2, h_x^2, h_y^2)$$

0/3 9

ка 16.04

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 18 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u + xy$$

$$u(t=0, x, y) = 0$$

$$u = u(t, x, y)$$

$$\begin{cases} u(t, x=0, y) = y+t \\ u(t, x=1, y) = y+t+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(t, x=0, y) = y+t \\ u(t, x=1, y) = y+t+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(t, x, y=0) = x+t \\ u(t, x, y=1) = x+t+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(t, x, y=0) = x+t \\ u(t, x, y=1) = x+t+1 \end{cases}$$

① 1) записать схему переносных направлений

2) проверить сходимость прогонки

3) $\alpha_1, \beta_1, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1$ - ? $u_{N_x, k}^{n+1/2-1}$ u_{j, N_y}^{n+1-1}

4) блок-схема

② 1) схему предиктор-корректор

2) записать рекуррентное соотношение

для корректора

3) блок-схема